

Total number of pages—16

26T MATH

2016

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

Contd.

1. Answer the following questions :

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Let $A = \{1, 2, 3\}$. For $x, y \in A$, let xRy if and only if $x > y$. Write down R as a subset of $A \times A$.

ধৰা $A = \{1, 2, 3\}$ । $x, y \in A$ বাবে, ধৰা xRy যদি আৰু যদিহে $x > y$ । R সংহতিটো $A \times A$ ৰ উপসংহতি হিচাপে লিখা।

(b) What is the domain of the function $f(x) = \frac{1}{x-2}$?

$f(x) = \frac{1}{x-2}$ ফলনৰ আদিক্তৰ কি ?

(c) If $(5 \ x \ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = (35)$, find x .

যদি $(5 \ x \ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = (35)$, x অৰ মান উলিওৱা।

(d) For what value of x , the matrix $\begin{pmatrix} 2-x & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ is not invertible?

x -অৰ কি মানৰ বাবে, মৌলকক $\begin{pmatrix} 2-x & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ প্ৰতিলোমনীয় নহয়?

(e) If A is a square matrix of order 3 such that $|A|=5$, find $|A \cdot \text{adj} A|$.

A এটা 3 ঘৰে বৰ্গ মৌলকক যতে $|A|=5$. তেহে $|A \cdot \text{adj} A|$ ৰ মান উলিওৱা।

(f) A function $f: R \rightarrow R$ is defined as follows

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \leq 1 \\ 5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Which one of the following is true ?

- (i) f is continuous at 0 and 1.
- (ii) f is continuous at 1 and 2.
- (iii) f is continuous at 0 and 2.
- (iv) f is continuous at 0, 1 and 2.

এটা ফলন $f: R \rightarrow R$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{যদি } x \leq 1 \\ 5, & \text{যদি } x > 1 \end{cases}$$

তলৰ কোনটো উক্তি সত্য ?

- (i) f ফলন 0 আৰু 1 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।
- (ii) f ফলন 1 আৰু 2 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।
- (iii) f ফলন 0 আৰু 2 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।
- (iv) f ফলন 0, 1 আৰু 2 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(9) Which one of the following is true?
For the function $f(x) = \cos x$.

- (i) f is strictly decreasing in $(\pi, 2\pi)$
- (ii) f is strictly increasing in $(\pi, 2\pi)$
- (iii) f is neither increasing nor decreasing in $(\pi, 2\pi)$

ফলন $f(x) = \cos x$ অব বারে তলর কোনটো উক্তি সত্য?

- (i) $(\pi, 2\pi)$ অন্তর্ভুক্ত, f নিশ্চিতভাৱে হ্রাসমান
- (ii) $(\pi, 2\pi)$ অন্তর্ভুক্ত, f নিশ্চিতভাৱে বৃদ্ধমান
- (iii) $(\pi, 2\pi)$ অন্তর্ভুক্ত, f বৃদ্ধমানো নহয় আৰু হ্রাসমানো নহয়।

(10) What is the unit vector along the vector $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$?

ভেক্টৰ $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ কি?

(11) What are the direction cosines of the normal to the plane $3x + 2y - 3z = 8$?

$3x + 2y - 3z = 8$ সমতলৰ অভিলম্বৰ দিশকোণৰ কিমান?

(12) What is the equation of the xy -plane?

xy -সমতলখনৰ সমীকৰণ কি?

2 Show that the relation R in the set \mathbb{Z} of integers given by $R = \{(x, y) : 5 \text{ divides } x - y\}$ is an equivalence relation. Find the set of elements related to 0.

দেখুওৱা যে, অখণ্ড সংখ্যাৰ সাহেতি \mathbb{Z} ত,

$R = \{(x, y) : x - y, 5 \text{ এৰে বিভাজ্য}\}$ এটা সমতুল্য সংঘ। 0 ৰ লগত সংঘত থকা মৌলিক সংহতিটো উলিওৱা।

OR / অথবা

A function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = 4x^3 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Examine if f is one-one and onto.

এটা ফলন $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ অব সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f(x) = 4x^3 + 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

f ফলনটো একৈকী আৰু আত্মনক হানে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

3. If $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \pi$, prove that

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$$

যদি $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \pi$, প্রমাণ কৰা যে

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$$

OR / অথবা

Prove that,

$$\tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

প্রমাণ করুন যে,

$$\tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

4. If $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, show that $A^2 - 5A + 7I = 0$. Hence find A^{-1} . 2+2=4

যদি $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, দেখুওঁ যে $A^2 - 5A + 7I = 0$ আৰু ইয়াৰপৰা A^{-1} উলিওৱা।

OR / অথবা

Using elementary row operations, find the inverse of the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

মৌলিক শাৰী পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

মৌলিককৰ্তাৰ প্ৰতিসোম মৌলিকক উলিওৱা।

6. Show that $f(x) = |x-3|$ is continuous but not differentiable at $x=3$.

গুণ্ডাৰ ওচৰত, ফল $f(x) = |x-3|$, $x=3$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অৱকলনীয় নহয়।

OR / অথবা

If $y = (\sin x)^{\log x}$, find $\frac{dy}{dx}$.

যদি $y = (\sin x)^{\log x}$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা।

6. Find the point at which the tangent to the curve $y = \sqrt{4x-3} - 1$ has its slope $\frac{2}{3}$. Also find the equation of the tangent at that point.

$y = \sqrt{4x-3} - 1$ বক্ৰৰ কি বিন্দুত, স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা $\frac{2}{3}$ হ'ব? লগতে সেই বিন্দুটোৰ স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

OR / অথবা

State Rolle's theorem and verify it for the following function.

$$f(x) = x^2 + 2x - 8, \quad x \in [-4, 2]$$

ব'লৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখা আৰু তলৰ ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত উপপাদ্যটোৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰা।

$$f(x) = x^2 + 2x - 8, \quad x \in [-4, 2]$$

7. Evaluate the following integrals :

অন্য অক্ষর মান উলিওঁ :

$$(i) \int (\sin^{-1} x)^2 dx$$

OR / অথবা

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

$$(ii) \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x) dx$$

OR / অথবা

$$\int_0^{\pi} \frac{x - \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

8. Solve :

সমাধান করি :

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

OR / অথবা

Form a differential equation by eliminating the arbitrary constants a and b from

$$y = e^x (a \cos x + b \sin x)$$

$y = e^x (a \cos x + b \sin x)$ এর লব সাদৃশিক ধরন a অথবা b অপসারণ করে অকলস সমীকরণ উলিওঁ :

9. Show that the family of curves for which the slope of the tangent at any point (x, y) on it is $\frac{x^2+y^2}{2xy}$, is given by $x^2 - y^2 = cx$.

সেত্রে (x, y) বিন্দু স্পর্শক অক্ষর $\frac{x^2+y^2}{2xy}$ হলে, বক্র পরিবারটির সমীকরণ $x^2 - y^2 = cx$ হবে।

10. Find the area of the parallelogram whose diagonals are given by the vectors $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ and $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ অথবা $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ এটা সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ হলে, সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল উলিওঁ।

OR / অথবা

If $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, show that \vec{a} and \vec{b} are perpendicular to each other.

যদি $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, তবে সেত্রে \vec{a} অথবা \vec{b} পরস্পর লম্ব।

11. Find the shortest distance between the lines whose vector equations are given by

$$\vec{r} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} + \lambda(-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \text{ and } \vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} + \mu(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

$r = i - j + 2k + \lambda(-2i + j + 3k)$ আৰু $s = 2i + 3j - k + \mu(3i - 2j + 2k)$ কেবা বৃহৎ মানৰ মানৰ নিম্নতম বৃত্ত উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the acute angle between the planes whose vector equations are

$$r \cdot (2i + 2j - 3k) = 5 \text{ and } r \cdot (3i - 3j + 5k) = 3$$

4

$r \cdot (2i + 2j - 3k) = 5$ আৰু $r \cdot (3i - 3j + 5k) = 3$ সমতল দুখনৰ মাজৰ সূক্ষ্ম কোণটো উলিওৱা।

12. Two cards are drawn successively, without replacement from a well-shuffled pack of 52 cards. Find the probability distribution of the number of aces.

4

52 পতীয়া আঁচপাত এজোপ ভাঙতে যিখিনি কৰি আপটোৰপৰা যুখন পাত একেদৰেমে পুনঃস্থাপন নকৰাকৈ টনা হ'ল। টোকাৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা ক'টন নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

A box contains 2 gold and 3 silver coins. Another box contains 3 gold and 3 silver coins. A box is chosen at random and a coin is drawn from it. If the selected coin is a gold coin, find the probability that it was drawn from the second box.

4

এটা বাকছত দুটা সোণৰ আৰু তিনিটা ৰূপৰ মুদ্ৰা আছে। আন এটা বাকছত তিনিটা সোণৰ আৰু তিনিটা ৰূপৰ মুদ্ৰা আছে। যত্নসহকাৰে এটা বাকছ লোৱা হ'ল আৰু তৰপৰা এটা মুদ্ৰা লোৱা হ'ল। যদি নিৰ্বাচিত মুদ্ৰাটো সোণৰ মুদ্ৰা হয়, তেন্তেহ'লে এইটো দ্বিতীয় বাকছটোৰপৰা লোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

13. Prove that

সময় কৰা যে

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha + \beta + \gamma)$$

OR / অথবা

Show that

লক্ষ্য কৰা যে

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$

6

14. Answer **any one** :

যিকোনো এটাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Find the maximum and minimum values, if any, of the following functions.

$$3+3=6$$

তলৰ ফলনযোৰৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান, যদি আছে, উলিওৱা।

(i) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12, x \in R$

(ii) $g(x) = -x^2 \log x, x \in R$

(b) Find the intervals in which the function $f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$, $x \neq 0$, is

(i) increasing.

(ii) decreasing

কি অন্তৰালত

$f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$, $x \neq 0$ ফলনটো

(i) বৰ্ধমান হ'ব,

(ii) হ্রাসমান হ'ব?

15. Find the area of the region in the first quadrant enclosed by the x-axis, the line $y=x$ and the circle $x^2+y^2=32$.

x-অক্ষ, $y=x$ রেখা আৰু $x^2+y^2=32$ বৃত্তই আওৰা প্ৰথম চোকত থকা ক্ষেত্ৰটোৰ কালি উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the area of the region common to the two circles $x^2+y^2=1$ and $(x-1)^2+y^2=1$.

$x^2+y^2=1$ আৰু $(x-1)^2+y^2=1$ বৃত্ত দুটাই আওৰা উম্মৈহতীয়া ক্ষেত্ৰৰ কালি উলিওৱা।

16. Evaluate $\int_0^2 (x^2+1)dx$ as a limit of a sum.

$\int_0^2 (x^2+1)dx$ অক যোগফলৰ সীমা হিচাপে প্ৰকাশ কৰি মূল উলিওৱা।

17. Find the vector equation of the plane passing through the planes $r \cdot (2i-j+2k) = 2$ and $r \cdot (3i+j-2k) = -2$ and a vector $a = 5i-2j+3k$.

$r \cdot (2i-j+2k) = 2$ আৰু $r \cdot (3i+j-2k) = -2$ সমতল দুখনে কটকাৰ অক্ষ ভেক্টৰ $a = 5i-2j+3k$ ৰ লম্বভাৱে থকা সমতলখনৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ

OR / অথবা

Find the equation of the plane that makes intercepts a , b and c on the x, y and z-axes respectively. Also, if p is the length of the normal to this plane, prove that

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$$

x, y আৰু z-অক্ষত যথাক্ৰমে a , b আৰু c ছেদাংশ সৃষ্টি কৰা সমতলৰ বিন্দুৰূপৰা সমতলখনৰ দূৰত্ব p একক হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$$

18. Solve the following linear programming problem graphically.

লৈনিক নিয়মে তলৰ বৈকিক প্ৰশ্নটি সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা:

Maximize and minimize $Z = 3x + 2y$
 subject to constraints $x + 3y \leq 60$
 $x + y \geq 10$
 $x \leq y$
 $x, y \geq 0$

$Z = 3x + 2y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা য'ত

$$\begin{aligned} x + 3y &\leq 60 \\ x + y &\geq 10 \\ x &\leq y \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

OR / অথবা

Maximize and minimize $Z = 5x + 7y$

subject to $x + y \leq 4$
 $3x + 8y \leq 24$
 $10x + 7y \leq 35$
 $x, y \geq 0$

$Z = 5x + 7y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা য'ত

$$\begin{aligned} x + y &\leq 4 \\ 3x + 8y &\leq 24 \\ 10x + 7y &\leq 35 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

19. The sum and the product of the mean and variance of a binomial distribution are 24 and 128 respectively. Find the distribution.

এটা বিনাম বিনাম হ'ল ২০৪ প্ৰায়ক প্ৰায়ক ২০৪-প্ৰায়ক ২০৪ ২৪ আৰু ১২৮ বিনাম হ'ল

OR / অথবা

If a fair coin is tossed 10 times, find the probability of getting

- (i) exactly six heads.
- (ii) at least six heads.
- (iii) at most six heads.

2+2+2=6

এটা নিৰপেক্ষ মুহূৰ্ত ১০ বাৰ ট'স কৰিলে, তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ সমাধান উলিওৱা:

- (i) ঠিক ষোল্ল মুহূৰ্ত মুহূৰ্ত হ'ল:
- (ii) অধিক কমেও ষোল্ল মুহূৰ্ত মুহূৰ্ত হ'ল:
- (iii) যুগ্ম বেছি ষোল্ল মুহূৰ্ত মুহূৰ্ত হ'ল:

— x —